

### Теоретический материал к сценарию АЮ-06-08.

По материалам учебника под авторством А.П. Киселев; ГЕОМЕТРИЯ ПЛАНИМЕТРИЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ УЧЕБНИК Под редакцией и с дополнениями проф. Н.А. Глаголева МОСКВА, ФИЗМАТЛИТ, 2004

Теорема.

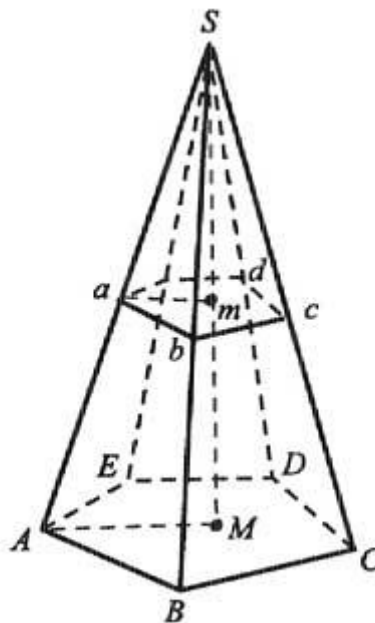
**Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:**

- 1. боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части;**
- 2. в сечении получается многоугольник, подобный основанию;**
- 3. площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.**

Возьмём пятиугольную пирамиду и пересечём её плоскостью параллельно основанию, получим многоугольник **abcde**.

**Доказательство первого утверждения: боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части.**

Посмотрим на рисунок (объект).



Прямые  $ab$  и  $AB$  можно рассматривать как линии пересечения двух параллельных плоскостей (основания и секущей) третьей плоскостью  $ASB$ ; поэтому  $ab \parallel AB$ . По этой же причине  $bc \parallel BC$ ,  $cd \parallel CD$ ... и  $am \parallel AM$  вследствие этого

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \dots = \frac{Sm}{mM}.$$

**Доказательство второго утверждения: в сечении получается многоугольник, подобный основанию.**

Из подобия треугольников  $ASB$  и  $aSb$ , затем  $BSC$  и  $bSc$  и т. д. выводим:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BS}{bS}; \quad \frac{BS}{bS} = \frac{BC}{bc},$$

откуда

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Так же

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CS}{cS}; \quad \frac{CS}{cS} = \frac{CD}{cd}, \quad \text{откуда} \quad \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}.$$

**Доказательство третьего утверждения: площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.**

Докажем пропорциональность сторон многоугольников  $ABCDE$  и  $abcde$ .

Так как, сверх того, у этих многоугольников равны соответственные углы (как образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны. Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон; поэтому

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2,$$

но

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AS}{aS} = \frac{MS}{mS},$$

значит

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \left(\frac{MS}{mS}\right)^2 = \frac{MS^2}{mS^2}.$$